



RE-3369

M. Com. (Part - I) Examination

April / May - 2010

Advanced Statistics - III

Time : 3 Hours]

[Total Marks :

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of signs on your answer book.

Name of the Examination :

Name of the Subject :

Subject Code No. : Section No. (1, 2.....):

Seat No. :

Student's Signature

(૨) જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નના પૂરા ગુણ દર્શાવે છે.

૧ (અ) યદચ્છ શ્રેણી $E_t, t=1, 2, \dots, N$ ને m વખત ચલાંતર કરીને ૬

મેળવેલ શ્રેણી $\Delta^m \varepsilon_t$ માટે k -ક્રમનો શ્રેણીગત સહસંબંધાંક મેળવો. અહીં

$$E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = V \text{ છે.}$$

(બ) સમીકરણ $U_{t+2} + aU_{t+1} + bU_t = \varepsilon_{t+2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિતીય ૮

કક્ષાની સ્વનિયત શ્રેણી હોય અને r_1, r_2 અનુક્રમે પ્રથમ અને દ્વિતીય

કક્ષાનાં શ્રેણીગત નિદર્શ સહસંબંધાંકો હોય તો સાબિત કરો કે

$$a = \frac{r_1 r_2 - r_1}{1 - r_1^2} \text{ અને } b = \frac{r^2 - r_2}{1 - r_1^2}$$

અથવા

૧ (અ) વ્યાપક ન્યૂનતમ વર્ગોની પદ્ધતિ સમજાવો તથા એયટકિનનું પ્રમેય લખો. ૭

(બ) સામયિક શ્રેણી $\{U_t : t=1, 2, \dots\}$ પરથી પ્રથમ કક્ષાની સ્વનિયત ૭

સંબંધ શ્રેણી સમીકરણ $U_{t+1} = aU_t + b + \varepsilon_{t+1}$ છે. જ્યાં a અને b વાસ્તવિક ચલો છે. યાદચ્છિક ત્રુટિપદ ε_t માટેની ધારણાઓ નીચે પ્રમાણે છે :

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2, \quad t = 1, 2, \dots$$

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0, \quad t \neq t' = 1, 2, \dots, \quad V_0 = 0, \quad |a| < 1$$

તો જ્યારે $t \rightarrow \infty$ હોય ત્યારે સાબિત કરો કે

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_k = a^k$$

૨ (અ) આંતર સહસંબંધ એટલે શું ? નિયત સંબંધ સમીકરણ ૮

$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + c_t$ જ્યાં દરેક ચલ તેના મધ્યકને કેન્દ્ર તરીકે લઈને માપવામાં આવેલાં છે. આંતરસંબંધને લીધે ન્યૂનતમ વર્ગની રીતે કેમ ઉપયોગી નથી તે સમજાવો.

(બ) ઓળખનો પ્રશ્ન વિસ્તૃત રીતે સમજાવો. ૬

અથવા

૨ (અ) આવર્તિતા આલેખ સમજાવી આવર્તિતા વક્ર અને સહસંબંધાંક આલેખ ૬ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

(બ) યદ્દચ્છ પદ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ વાળી આકસ્મિક શ્રેણીમાંથી (જેમાં $E(\varepsilon_t) = 0$, ૭

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, \quad t \neq s) \quad w_1, w_2, \dots, w_m$$
 ભારવાળી ચલિત સરેરાશથી

શ્રેણી $n_1, n_2, \dots, n_{n-m+1}$ મેળવવામાં આવે છે. આ શ્રેણી માટે k -ક્રમનો શ્રેણીગત સહસંબંધાંક મેળવો.

૩ (અ) વિષમ વિચરણતા સમજાવો. ત્રુટિપદો વચ્ચે સહસંબંધ પ્રવર્તે છે. તેનું પરીક્ષણ ૭ કરવા માટેનું ડર્બિન વોટસન પરીક્ષણ સમજાવો.

(બ) જો સમીકરણ $U_{t+2} + aU_{t+1} + bU_t = \varepsilon_{t+2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિતીય ૭ કક્ષાની સ્વનિયતસંબંધ શ્રેણીના પદોની સંખ્યા ઘણી મોટી હોય તો સાબિત કરો કે

$$\frac{V(U_t)}{V(\varepsilon_t)} = \frac{1+b}{(1-b)\{(a-b)^2 - a^2\}}$$

અથવા

૩ (અ) ચક્રીય સામયિક શ્રેણી અને દોલનશીલ શ્રેણી વચ્ચેનો તફાવત સ્પષ્ટ કરો ૭ તથા દોલનશીલ શ્રેણીનાં ઉદ્ભવનાં કારણો જણાવો. સ્વનિયત સંબંધ શ્રેણી $U_t = \rho U_{t+1} = n_t$ માટે સાબિત કરો કે $\rho_k = \rho^k$ જ્યાં n_t શૂન્ય મધ્યકવાળો યદ્યચ્છ ચલ છે અને $E(x_i, n_j) = 0$ ($i \neq j$) અને ρ_k , k -ક્રમનો સ્વસહસંબંધાંક છે.

(બ) સમીકરણ $U_{t+2} + aU_{t+1} + bU_t = \varepsilon_{t+2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિતીય ૭ કક્ષાની સ્વનિયત સંબંધ શ્રેણીનાં અચળાંકો a અને b ની કિંમત શ્રેણીગત સહસંબંધાંકોનાં રૂપમાં મેળવો. તેમજ આ દ્વિતીય કક્ષાની સ્વનિયત સંબંધ શ્રેણીનાં શ્રેણીગત સહસંબંધાંક $r_1 = 0.6$ અને $r_2 = -0.15$ હોય તો અચળાંકો a અને b ની કિંમત શોધો.

૪ (અ) ઓયલર પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૭

(બ) નીચેના ઉત્પાદન વિધેયો માટે નિક્ષેપ અવેજનો સીમાન્તર દર મેળવો અને ૭ આ દર ધન છે કે કેમ તે નક્કી કરો.

(૧) $q = A(x_1 + 1)\alpha(x_2 + 1)\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $A > 0$

(૨) $q = 100(x_1 + x_2) + 20x_1x_2 - 12.5(x_1^2 + x_2^2)$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

અથવા

૪ (અ) જો ગ્રાહકનું એક દિવસ માટેનું તુષ્ટિગુણ વિધેય $U = 48L + L_y - L^2$ ૭
હોય તો ગ્રાહકનાં કામ માટે પુરવઠા વિધેય મેળવો.

(બ) ઉત્પાદન વિધેય $q = 10 - x_1^{-1} - x_2^{-1}$ માટે નિક્ષેપ x_1 અને x_2 ની ૭
એકમદીઠ કિંમત $p_1 = 4$ અને $p_2 = 1$ છે. જો q ની એકમદીઠ કિંમત
 $p = q$ હોય તો ઉત્પાદનનો મહત્તમ નફો શોધો.

૫ (અ) બે વસ્તુઓ x અને y નું તુષ્ટિગુણ વિધેય $U(x+2)^{2/3}(y+1)^{1/3}$ છે. ૭
બજેટ સમીકરણ $2x + y = 7$ છે. તો તુષ્ટિગુણ વિધેય મહત્તમ બને તે માટેની
 x અને y ની કિંમતો શોધો.

(બ) અચળ અવેજનું મૂલ્યસાપેક્ષતા વિધેય (CES) સમજાવો. CES ઉત્પાદન ૭
વિધેયનાં ગુણધર્મો સમજાવો.

અથવા

૫ (અ) બે વસ્તુઓનાં જથ્થાં x_1 અને x_2 માટે ગ્રાહકનું તુષ્ટિગુણ વિધેય ૮
 $U = \alpha \log(x_1 + 2) + \beta \log(x_1 + b)$ છે. તો બંને વસ્તુઓ વચ્ચેની

અવેજની સાપેક્ષતા $\sigma = 1 + \frac{b\alpha x_1 + a\beta x_2}{(\alpha + \beta)x_1 x_2}$ છે તેમ બતાવો.

(બ) બે વસ્તુઓ x_1 અને x_2 નું તુષ્ટિગુણ વિધેય $U = \sqrt{x_1 x_2}$ છે. જો ૬
જથ્થા x_1 અને x_2 ની એકમદીઠ કિંમત $P_1 = 5$ અને $P_2 = 2$ નાણાકીય
એકમ હોય તથા ગ્રાહકની ખર્ચા પાત્ર આવક 100 નાણાકીય એકમ હોય
તો x_1 અને x_2 ની કિંમતો મેળવો તથા λ ની કિંમત પણ શોધો.

ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the instruction no. 1 of page no. 1.
 (2) Figures to the right indicate full marks of the question.

- 1 (a) Obtain k^{th} order serial coefficient of correlation for 6
 the series $\Delta^m \varepsilon_t$, which is obtained by variate difference
 method m times for a random series $E_t, t = 1, 2, \dots, N$
 here $E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = V$.
- (b) Prove that the constant a and b of second order 8
 auto regressive series in the form of serial coefficient
 of correlation defined by the equation

$$U_{t+2} + aU_{t+1} + bU_t = \varepsilon_{t+2} \text{ are}$$

$$a = \frac{r_1 r_2 - r_1}{1 - r_1^2} \text{ and } b = \frac{r_2 - r_2}{1 - r_1^2}$$

OR

- 1 (a) Explain Generalised least square method. Also write 7
 the Aitken's theorem.
- (b) The first order auto regressive series equation is 7
 $U_{t+1} = aU_t + b + \varepsilon_{t+1}$, Obtain from the time series
 $\{U_t : t = 1, 2, \dots\}$, where a and b are real variables
 and the assumptions of the error term ε_t are given
 below.

$$E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2, t = 1, 2, \dots$$

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0, t \neq t' = 1, 2, \dots, V_0 = 0, |a| < 1$$

and when $t \rightarrow \infty$ then prove that $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_k = a^k$.

2 (a) What is multicollinearity ? The regression equation is $y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + c_t$, where every variable is measured by taking mean as centre. Explain the method of least squares cannot be useful due to multicollinearity. 8

(b) Explain the problem of identification with illustration. 6

OR

2 (a) Explain periodogram. Obtain the relation between periodogram and correlogram. 6

(b) Obtain k^{th} order serial coefficient of correlation for random series $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, where $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, t \neq s$. The series $n_1, n_2, \dots, n_{n-m+1}$ is obtained with weighted moving average w_1, w_2, \dots, w_m . 7

3 (a) Explain Heteroscedasticity. Explain Durbin-Watson test to examine that there exists auto-correlation between the error terms. 7

(b) If the term of second order auto-regressive series are very large defined by the equation

$$U_{t+2} + aU_{t+1} + bU_t = \varepsilon_{t+2} \text{ then prove that}$$

$$\frac{V(U_t)}{V(\varepsilon_t)} = \frac{1+b}{(1-b)\{(a-b)^2 - a^2\}}$$

OR

- 3 (a) Explain the difference between cyclical time series and oscillatory times series. Give the causes for the happening of oscillatory time series. 7

For the autoregressive series $U_t = \rho U_{t+1} + n_t$, prove that $\rho_k = \rho^k$, where n_t is a random variable, with mean zero and $E(x_i, n_j) = 0$ ($i \neq j$) and ρ_k is k^{th} term auto coefficient of correlation.

- (b) Obtain the constants a and b of second order autoregressive series in the form of serial coefficient of correlation with is defined by the equation 7

$$U_{t+2} + aU_{t+1} + bU_t = \varepsilon_{t+2}$$

and if the coefficient of correlation of auto regressive series are $r_1 = 0.6$ and $r_2 = -0.15$ then find the value of a and b .

- 4 (a) State and prove Euler's theorem. 7

- (b) Obtain the marginal rate of input substitution for the following production functions : 7

(1) $q = A(x_1 + 1)^\alpha(x_2 + 1)^\beta, \alpha > 0, \beta > 0, A > 0$

(2) $q = 100(x_1 + x_2) + 20x_1x_2 - 12.5(x_1^2 + x_2^2), x_1 > 0, x_2 > 0$

OR

- 4 (a) The utility function for a day is $U = 48L + L_y - L^2$, 7
then obtain supply function for consumer.

- (b) The price per unit of the input x_1 and x_2 are $p_1 = 4$ 7
and $p_2 = 1$ for the production function $q = 10 - x_1^{-1} - x_2^{-1}$.
If the price per unit of q is $p = q$. then obtain the maximum profit for the producer.

- 5 (a) The utility function for two commodities x and y is **7**
 $U(x+2)^{3/2}(y+1)^{1/3}$ and the budget function is
 $2x + y = 7$, obtained the value of x and y which maximizes
the utility function.
- (b) Explain the constant elasticity of substitution production **7**
function (CES). Explain the properties of the production
function (CES).

OR

- 5 (a) The utility function for the quantity of x_1 and x_2 **8**
is $U = \alpha \log(x_1 + a) + \beta \log(x_1 + b)$, they show that
elasticity of substitution between two commodities is

$$\sigma = 1 + \frac{b\alpha x_1 + a\beta x_2}{(\alpha + \beta)x_1 x_2}$$
- (b) The utility function at two commodities, x_1 and x_2 **6**
is $U = \sqrt{x_1 x_2}$, If the price per unit of the two quantity
 x_1 and x_2 are $P_1 = 5$ and $P_2 = 2$, financial unit the
capacity for expenditure, revenue is 100 unit then
obtain the value of x_1 and x_2 , also obtain the value
of λ .